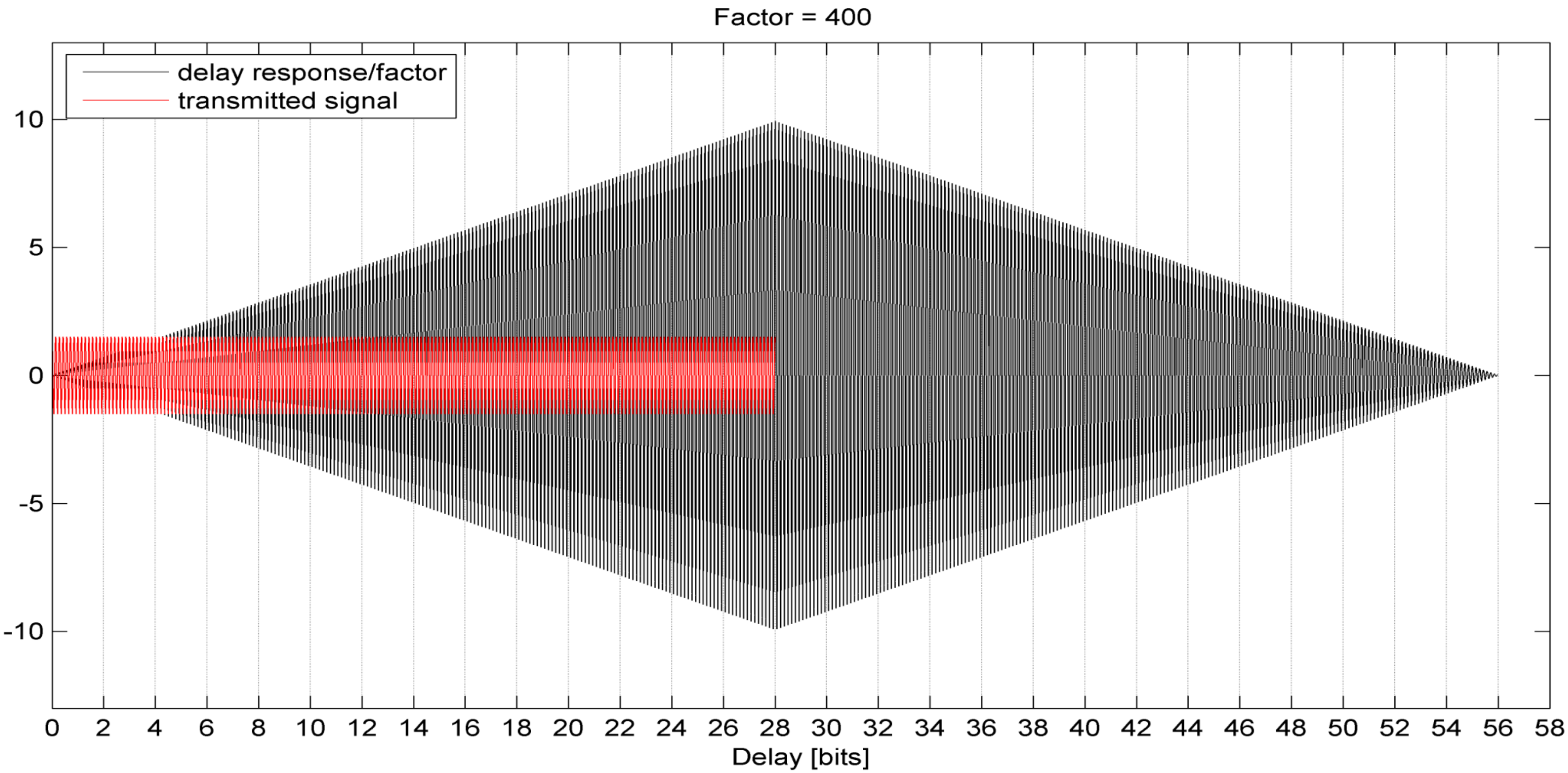
RADAR WAVEFORMS

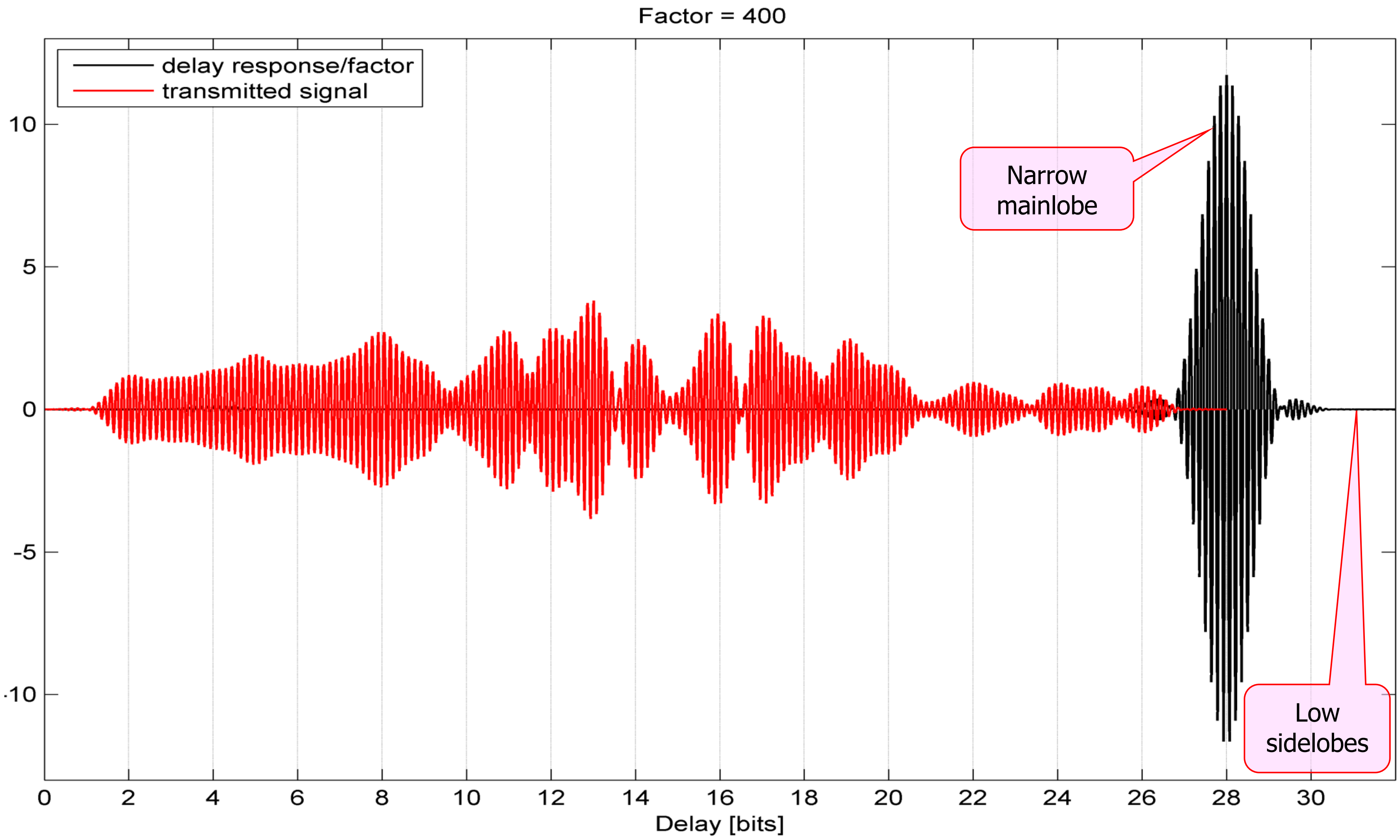
ANALYSIS, DESIGN AND PROCESSING

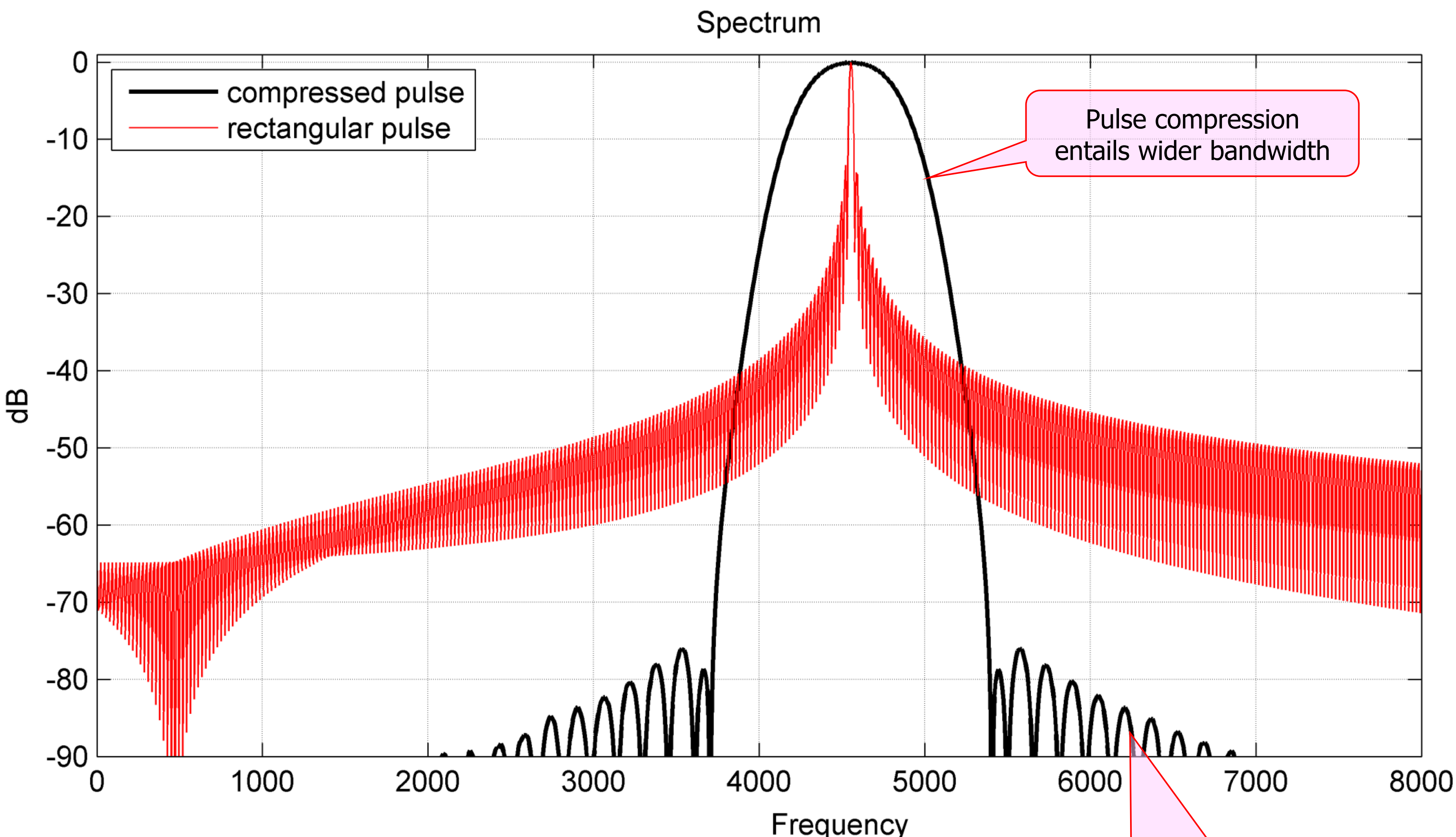
- Matched filter
- Matched filter for band-pass signals
- Delay-Doppler response (ambiguity function)

Rectangular pulse and its matched-filter output



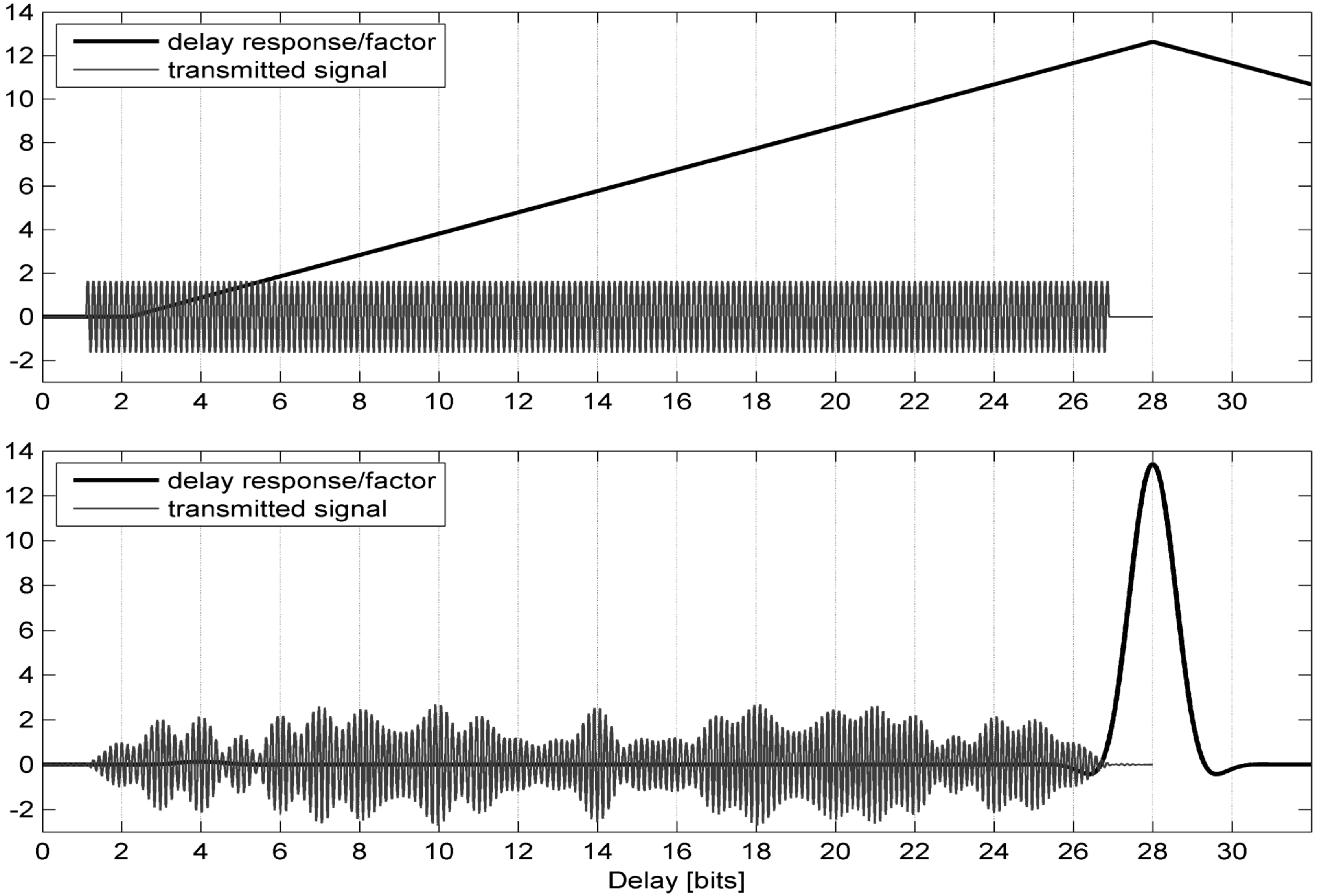
Compressed pulse and its matched-filter output



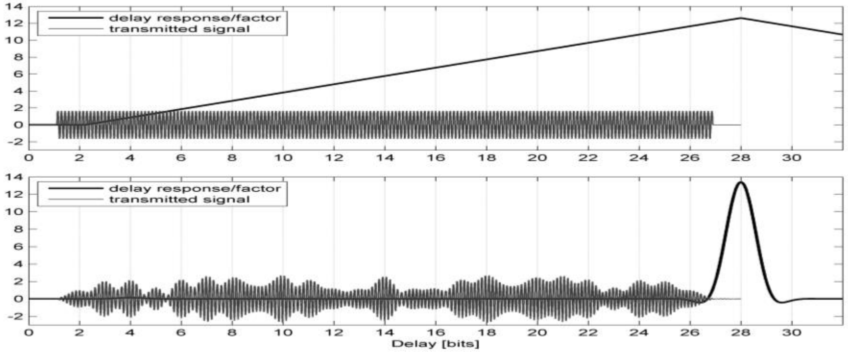


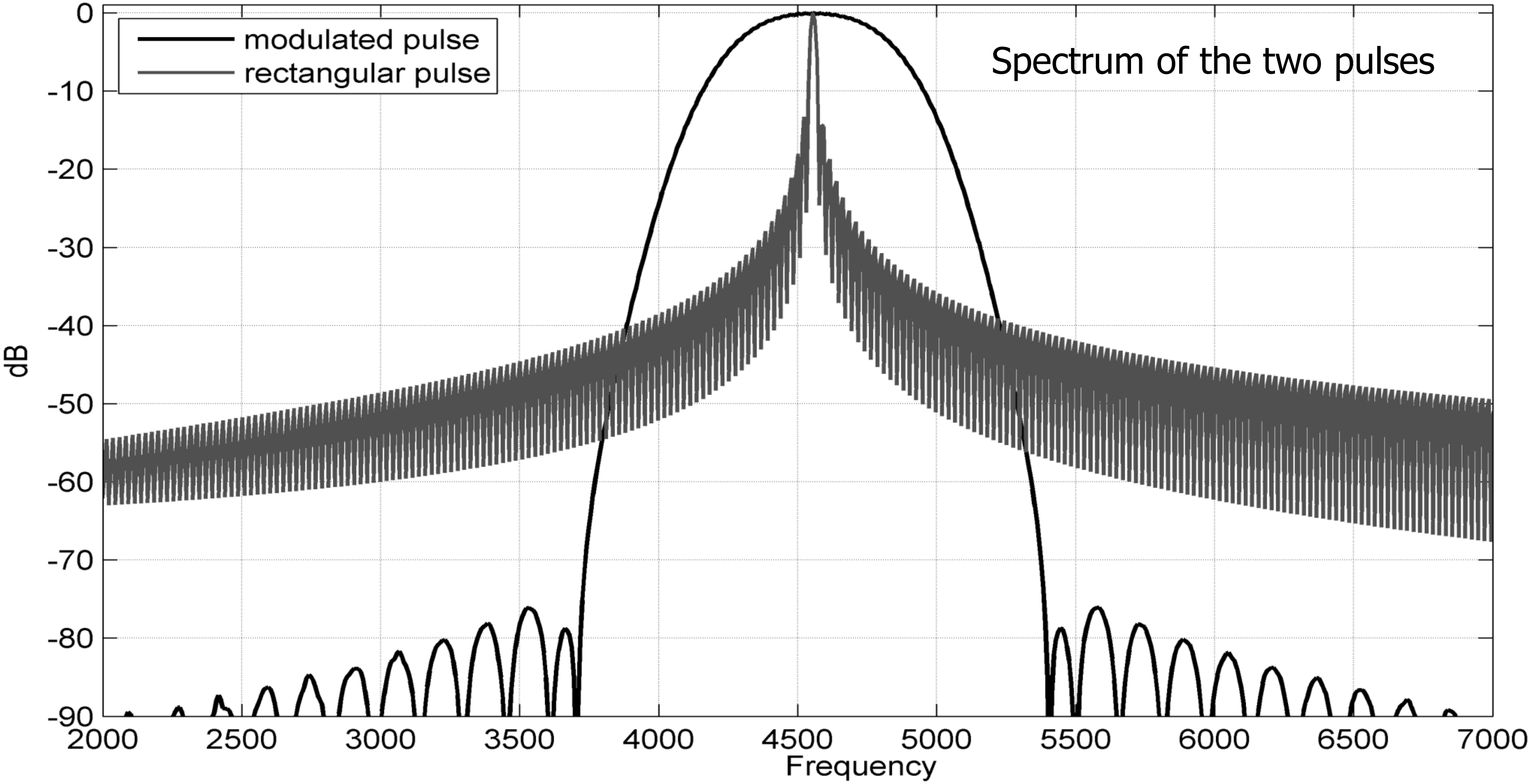
Pulse compression entails wider bandwidth

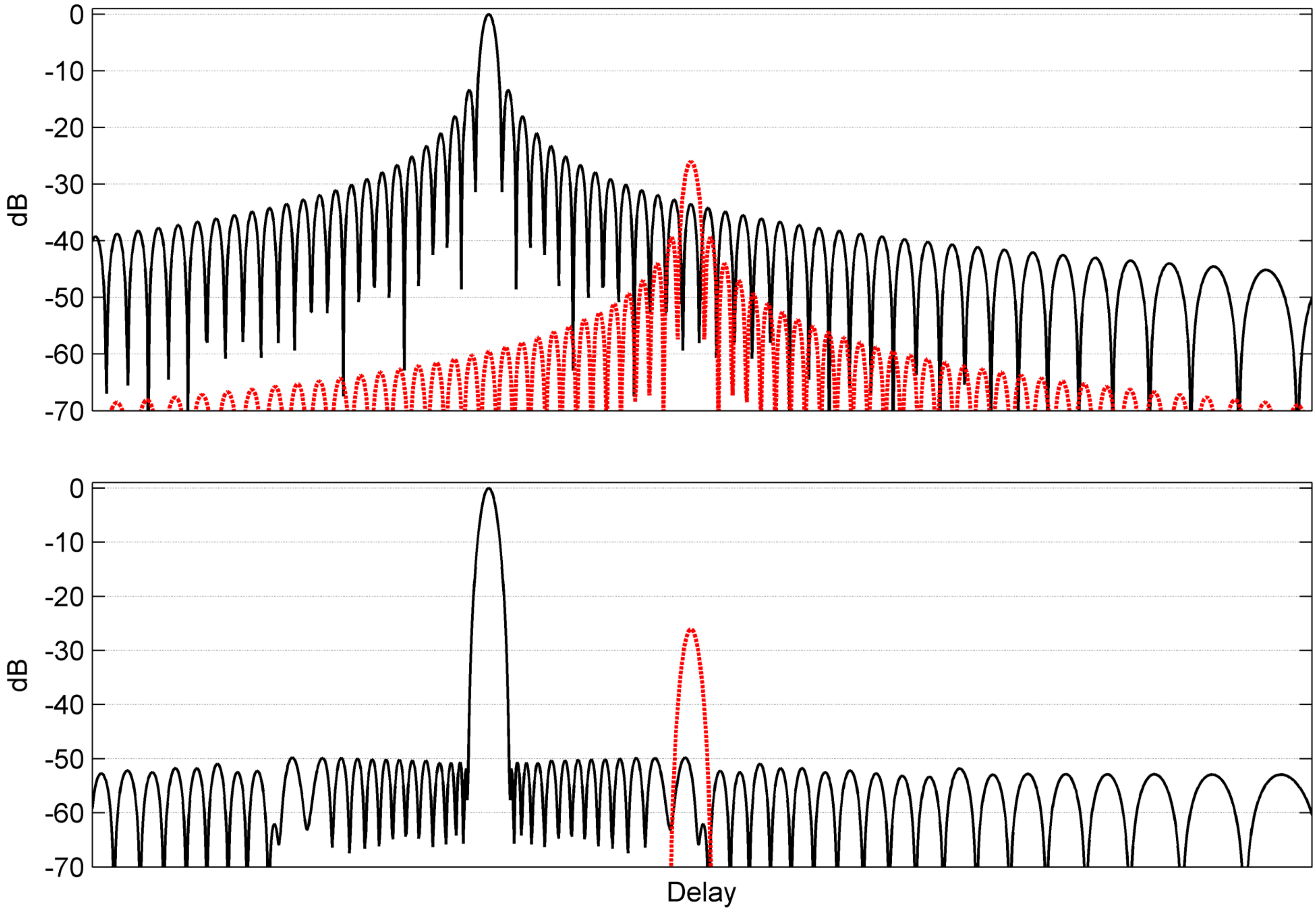
Variable signal amplitude can reduce spectral sidelobes



Delay response of a long pulse: (top) without and (bottom) with pulse compression


delay response/factor
transmitted signal
delay response/factor
transmitted signal
Delay [bits]


modulated pulse
rectangular pulse
Spectrum of the two pulses
dB
Frequency



Delay responses of a compressed pulse: (top) without and (bottom) with sidelobe reduction

Matched filter מסנן מתואם

מסנן מתואם(North)

- מסנן אות נתון מתוך רעש.
- עבור אות נתון - ממכסם את יחס האות לרעש במוצא המסנן, בנקודת זמן אחת מסוימת.
- מתאים לתקשורת סיפרתית בה צריך להבחין בין מספר סופי של אותות צפויים.
- במקור הוצע ע"י North למכ"ם, בו יש להחליט אם ניקלט פולס או לא.

מסנן אופטימלי לפי Wiener

- מסנן אות מתוך רעש.
- האופטימליות = ממוצע השגיאה הריבועית מינימלי (בין מוצא המסנן לבין האות הרצוי).
- מתאים לתקשורת אנלוגית בה נדרשת נאמנות גבוה בין האות המשוחזר למשודר.

Matched filter מסנן מתואם

- הפולס משודר בצורה מוגדרת וידועה מראש ובאורך סופי.
- האות המוחזר ממטרה נקודתית ומגיע למקלט, הוא בעל אותה צורה ידועה מראש.
- בכניסה למקלט מתווסף אליו רעש $n(t)$ שצפיפות ההספק הספקטרלית שלו $P_n(f)$ ידועה .
- סביר שדרגת הכניסה למקלט תכיל מסנן לינארי כל שהוא שיגביל את רוחב הפס, ויקטין בכך את הספק הרעש הנקלט .
- משיקולי הספק הרעש נשאף להצרה מכסימלית של רוחב הפס .
- מאידך אם תחום המעבר של המסנן לא יכיל את תחום התדרים בהם מרוכז מרבית הספק האות הנקלט, יעלם גם רב האות .
- בפרק זה נחפש מסנן לינארי עם תגובה לתדר מסוימת שתהיה אופטימלית מבחינת החלשת הרעש ואי החלשת האות.

• בניגוד למסננים אחרים, בהם היינו מעונינים לשמור על צורת האות, כאן אנחנו מעונינים לגלות אם הופיע האות או לא (כאשר "1" מיוצג ע"י האות ו- "0" ע"י היעדרותו) או אם הופיע האות או היפוכו (כאשר "1" מיוצג ע"י האות ו- "0" ע"י היפוכו מבחינת הקיטוב).

• לא משנה מה תהיה צורת האות במוצא המסנן. מה שחשוב הוא שברגע דגימה מסוים וקבוע מראש t_o יהיה הספק האות במוצא המסנן מכסימלי יחסית להספק הרעש הממוצע במוצא המסנן.

$$r(t)=s(t)+n(t)$$

Matched filter

$h(t)$, $H(f)$

$$r_o(t)=s_o(t)+n_o(t)$$

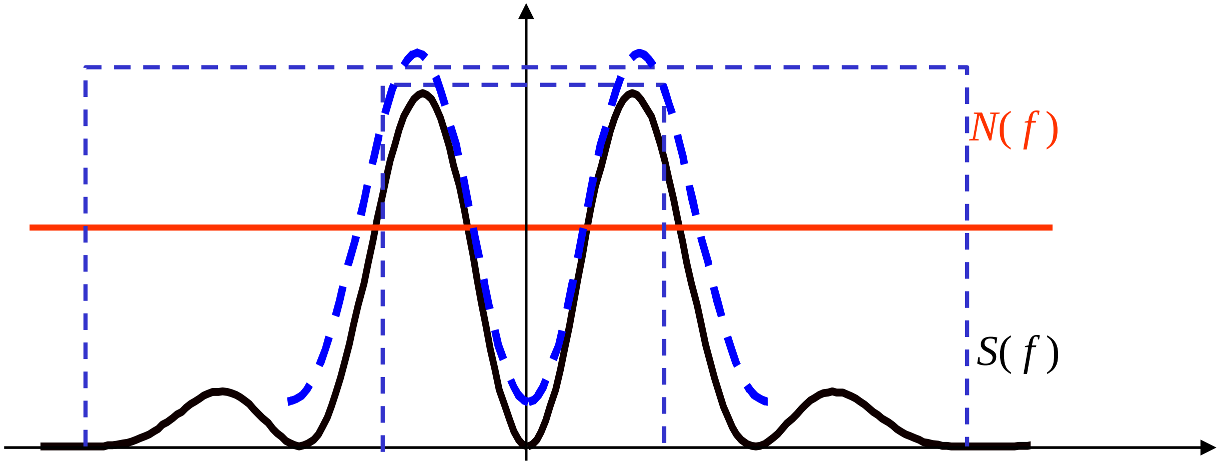
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}=\frac{s_o^2(t_0)}{\overline{n_o^2(t)}}$$

נחפש את התגובה להלם $h(t)$ או לחילופין את תגובת התדר $H(f)$ שיתנו ערך מכסימלי ליחס:

המסנן הלינארי שיתן את הערך המכסימלי ליחס האות לרעש, בנקודת זמן מסוימת t_0 , נקרא מסנן מתואם .

$$r(t) = s(t) + n(t) \longrightarrow \boxed{\text{Matched filter } h(t)\ ,\ H(f)} \longrightarrow r_o(t) = s_o(t) + n_o(t)$$

$H(f) = ?$



האופיין של מסנן מתואם יהיה תלוי בשלושה גורמים:

- צורת האות הנקלט $s(t)$
- צפיפות ההספק הספקטראלית של הרעש $P_n(f)$
- רגע הדגימה t_0

נצמצם את הדיון למקרה שהרעש הוא רעש לבן

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < f < \infty$$

(אותות צרי סרט מיוצגים בעזרת אותות מורכבים, לכן נרחיב את סוג האות שעבורו נועד המסנן המתואם לאות מורכב ולא רק לאות ממשי).

התגובה להלם ותגובת התדר של מסנן מתואם

תוצאה: עבור המקרה של רעש לבן יהיו תגובת התדר והתגובה להלם של המסנן המתואם נתונים ע"י:

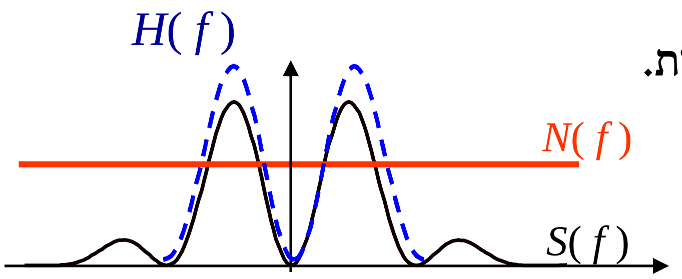
$$H(f) = C\, S^*(f) \exp(-j2\pi f t_0)$$

$$h(t) = C\, s^*(t_0 - t)$$

כאשר C : הוא קבוע (בעל מימד).

$S^*(f)$ הוא הצמוד הקומפלקסי של התמרת פורייה של האות.

t_0 היא נקודת הזמן שבה נבדק מוצא המסנן.



הוכחה:

האות במוצא מסנן ליניארי נתון ע"י התמרת פורייה ההפוכה של מכפלת התמרת פורייה של האות, בתגובה לתדר.

$$s_o(t_0)=\mathbf{F}^{-1}\left[H(f)S(f)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)S(f)\exp(j2\pi f\,t_0)\,df$$

הספק הרעש הממוצע במוצא מסנן ליניארי נתון ע"י

$$\overline{n_0^2(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(f)\left|H(f)\right|^2 df=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df$$

יחס האות לרעש:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{out}}=\frac{s_o^2(t_0)}{\overline{n_o^2(t)}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{out}}=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(f)S(f)\exp(j2\pi f\,t_0)\,df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df}$$

נפעיל על המונה את אי השוויון של Schwarz האומר כי לגבי שתי פונקציות מורכבות $A(f),B(f)$ של משתנה ממשי f מתקיים אי השוויון

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}A(f)B(f)\,df\right|^2\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|A(f)\right|^2 df\int_{-\infty}^{\infty}\left|B(f)\right|^2 df$$

כששוויון מושג אך ורק כאשר $A(f)=C\,B^*(f)$ ו-C הוא קבוע ממשי שרירותי.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 df$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)\exp(j2\pi f t_0)df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

$$A(f)=H(f)\,,\; B(f)=S(f)\exp\left(j2\pi f\, t_0\right)$$

כשתי הפונקציות המופיעות באי השוויון נבחר

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} \le \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)\exp(j2\pi f\, t_0)|^2 df}{\frac{N_0}{2}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}}$$

יחס האות לרעש (SNR) יהיה מכסימלי כאשר אי-השוויון יהפוך לשוויון . זה יקרה כאשר יתקיים

$$A(f)=H(f)\,,\; B(f)=S(f)\exp(j2\pi f t_0)$$

$$A(f)=C\,B^*(f)$$

כלומר לקבלת SNR מכסימלי נדרוש:

$$H(f)=CS^*(f)\exp(-j2\pi f t_0)$$

לקבלת התגובה להלם נבצע התמרת פורייה הפוכה של התגובה לתדר

$$h(t)=\mathrm{F}^{-1}\{H(f)\}=C\int_{-\infty}^{\infty}\left[S^*(f)\exp(-j2\pi f t_0)\right]\exp(j2\pi f t)\,df$$

$$=C\int_{-\infty}^{\infty}S^*(f)\exp[-j2\pi f(t_0-t)]\,df=C\left[\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\exp[j2\pi f(t_0-t)]\right]^*$$

$$=C[s(t_0-t)]^*=Cs^*(t_0-t)$$

לגבי אותות ממשיים אין משמעות לסימן הצמוד.(*)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(f)\right|^2 df}{\frac{N_0}{2}}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|S(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

ערך יחס האות לרעש במוצא מסנן מתואם בנקודת הזמן t_0 בו הוא מכסימלי

$$\max\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(f)\right|^2 df}{\frac{N_0}{2}}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|S(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

$$\max\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(f)\right|^2 df}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2E}{N_0}$$

יחס האות לרעש הטוב ביותר שניתן להשיג $2E/N_0$ תלוי באנרגית האות ולא בצורתו.

ערך אות המוצא עצמו בנקודת הזמן t_0

$$H(f)=CS^{*}(f)\exp\left(-j2\pi f t_0\right)$$

$$s_o(t_0)=\mathcal{F}^{-1}\{S(f)H(f)\}\Big|_{t=t_0}=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)S(f)\exp\left(j2\pi f t_0\right)df$$

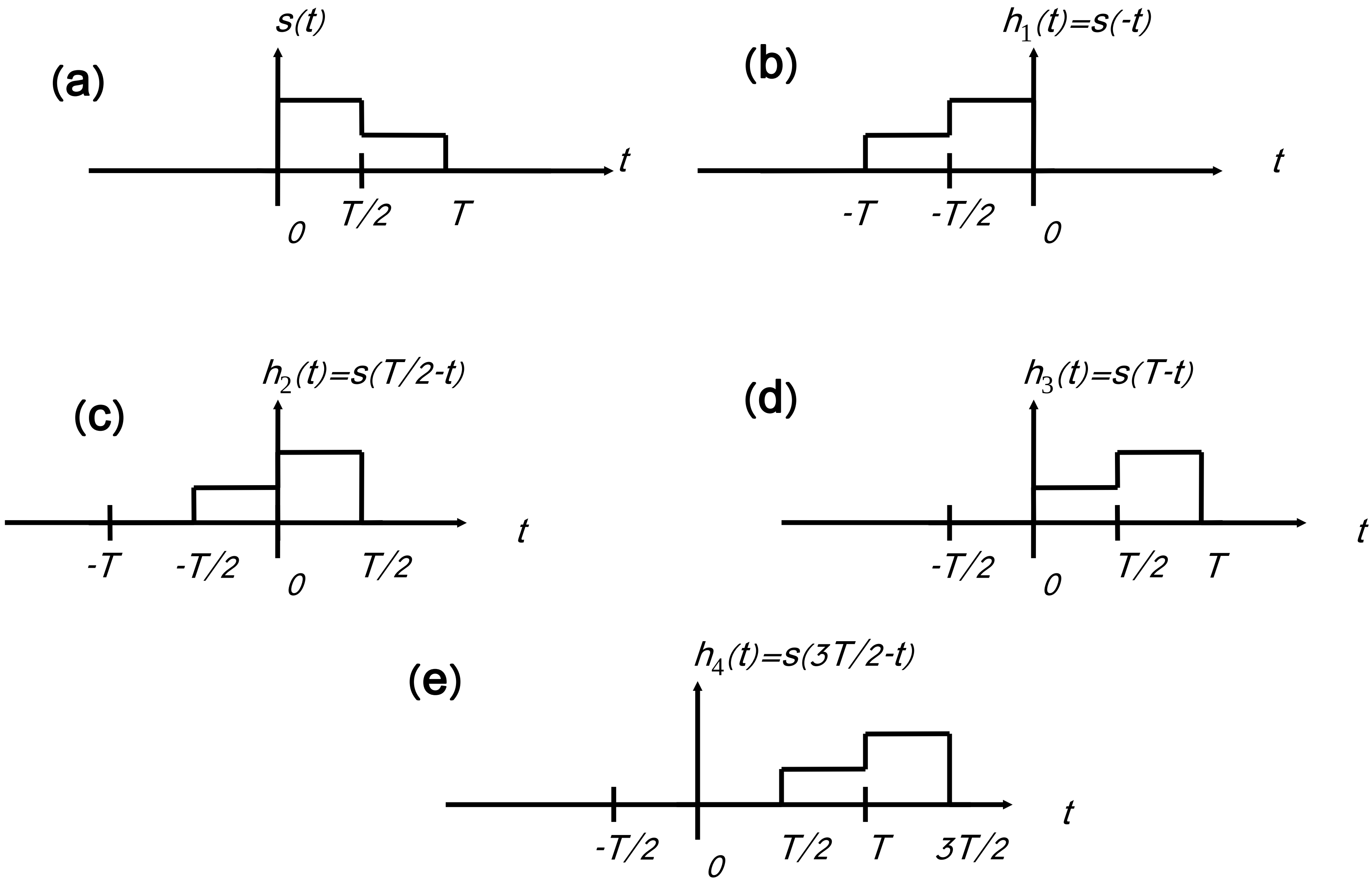
$$s_o(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}CS^{*}(f)\exp\left(-j2\pi f t_0\right)S(f)\exp\left(j2\pi f t_0\right)df=C\int_{-\infty}^{\infty}\left|S^{*}(f)\right|^{2}df$$

$$s_o(t_0)=CE$$

קיבלנו שלאות המוצא של מסנן מתואם ברגע הדגימה הנכון יש עצמה היחסית לסך כל האנרגיה באות המבוא. תוצאה זאת נכונה לכל צורת אות מבוא שהיא, בתנאי שהמסנן תואם אליה .

מכיוון שלעצמת אות ולאנרגיה אין אותו מימד, הנוסחא גם ממחישה שהמקדם C אינו יכול להיות חסר מימד.

$$\mathrm{Volt}=C\cdot\mathrm{Volt}^{2}\cdot\mathrm{sec}\quad,\quad[C]=\frac{1}{\mathrm{Volt}\cdot\mathrm{sec}}$$



משמעות ההיפוך בזמן וההסטה בזמן

התגובה של מסנן מתואם ופונקצית האוטוקורלציה

<u>תוצאה</u>: תגובת מסנן מתואם לאות כניסה שעבורו תואם, זהה לפונקצית האוטוקורלציה של האות.

$$s_o(t)=s(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

<u>הוכחה</u>: המוצא של מסנן בעל תגובה להלם $h(t)$ לאות מבוא $s(t)$ נתון ע״י קונבולוציה בין השנים.

נחליף בין שני המשתנים t,τ

$$s_o(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)h(\tau-t)dt$$

המסנן המתואם מכתיב

$$h(\tau-t)=Cs^*[t_0-(\tau-t)]$$

$$s_o(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)Cs^*[t_0-(\tau-t)]dt=C\int_{-\infty}^{\infty}s(t)s^*[t-\tau+t_0]dt$$

בחירה שרירותית של $t_0=0,\quad C=1$

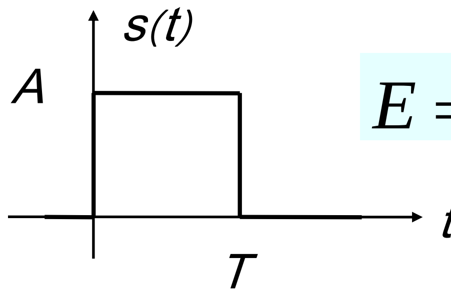
$$s_o(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)s^*(t-\tau)dt$$

בחירה שונה של t_0 תתן פונקצית אוטוקורלציה מושהית. קיבלנו שהמוצא בזמן של המסנן המתואם לאות המבוא עבורו תוכנן, זהה (עד לכדי קבוע, והשהיה) לפונקצית האוטוקורלציה של אות המבוא .

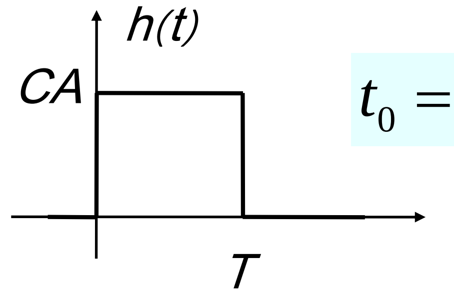
מסנן מתואם לפולס מלבני

$$s(t) = A, \quad 0 \le t \le T, \quad \text{zero} \quad \text{elsewhere}$$

$$h(t) = CA, \quad 0 \le t \le T, \quad \text{zero} \quad \text{elsewhere}$$



$$E = A^2 T$$



$$t_0 = T$$

האות והתגובה להלם של המסנן המתואם

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

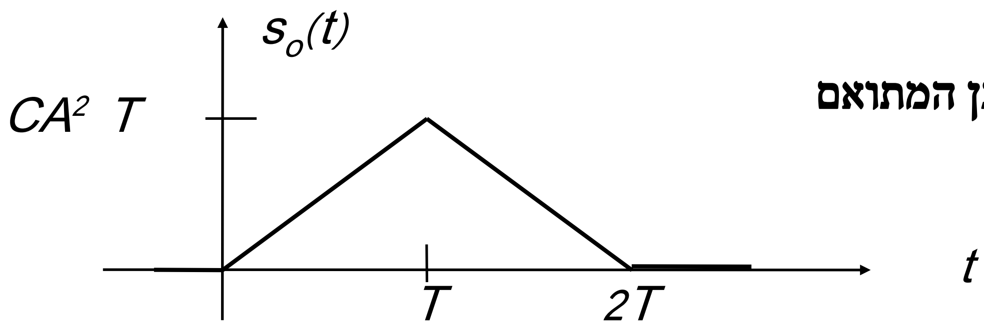
$$t - \tau \le 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \ge t$$

באינטגרל הקונבולוציה הגבול התחתון נקבע ע״י האות כי הוא
מתאפס לפני t=0 , והגבול העליון של האינטגרל נקבע ע״י
התגובה להלם של המסנן המתאפסת כאשר

$$s_o(t) = \int_0^t CA^2 d\tau = CA^2 t, \quad 0 \le t \le T$$

החצי הראשון של אות המוצא

והחצי השני סימטרי לגבי הזמן t=T .



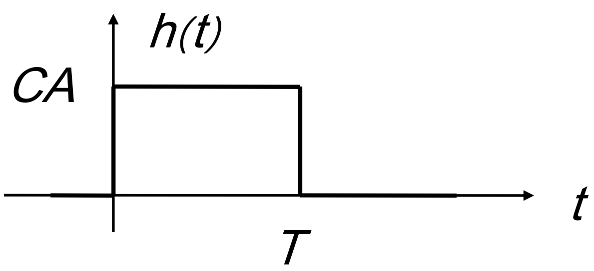
מוצא המסנן המתואם

בנקודת הדגימה $t = T$ נקבל

$$s_o(t) = CA^2T = CE$$

הספק הרעש הממוצע נתון ע"י

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt$$

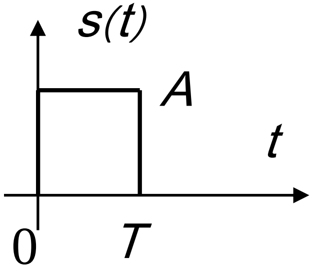


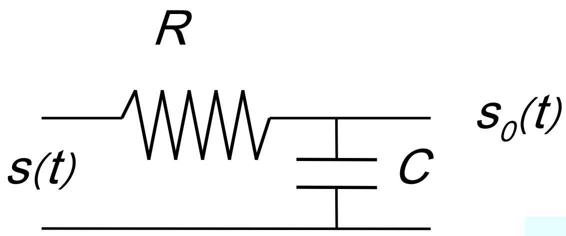
$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{N_0}{2}\int_0^T C^2A^2 dt = \frac{N_0}{2}C^2A^2T$$

יחס האות לרעש ברגע הדגימה

$$\frac{s_o^2(T)}{\overline{n_o^2(t)}} = \frac{\left(CA^2T\right)^2}{\frac{N_0}{2}C^2A^2T} = \frac{2A^2T}{N_0} = \frac{2E}{N_0}$$

נדגים שה SNR במוצא מסנן מתואם אכן
גבוה מה SNR שיתקבל במסנן אחר,
למשל ב LPF הממומש ע"י נגד קבל.

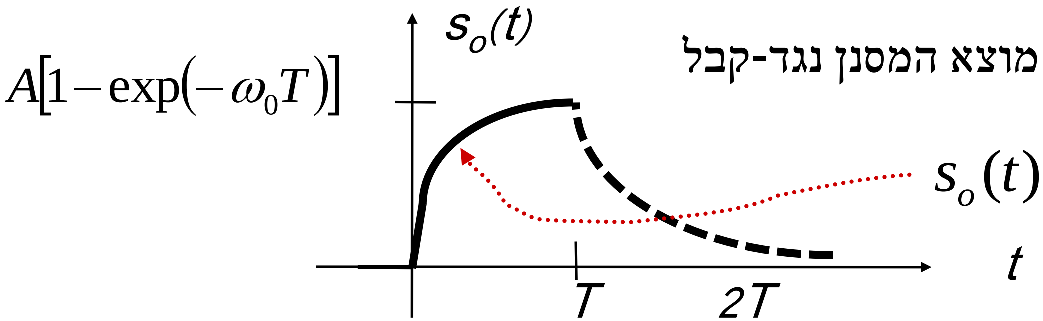




מסנן נַגֵד קָבָל

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}};\quad \omega_0=\frac{1}{RC}$$

הערך של ω_0 יבחר על
מנת שיתקבל יחס אות
לרעש הטוב ביותר.



$$s_o(t)=A[1-\exp(-\omega_0 t)];\quad 0\le t\le T$$

$$\overline{n_o^2(t)}=\frac{N_0}{2}\int_{f=-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega$$

עוצמת האות תהיה מקסימלית ברגע T

$$s_o(T)=A[1-\exp(-\omega_0 T)]$$

$$\overline{n_o^2(t)}=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}d\omega=\frac{N_0}{2}\frac{\omega_0}{2}$$

$$\mathrm{SNR}(T)=\frac{s_o^2(T)}{\overline{n_o^2(t)}}=\frac{4A^2}{N_0\omega_0}[1-\exp(-\omega_0 T)]^2$$

נחפש את תדר הברך של המסנן
שתיתן יחס אות לרעש מכסימלי

$$\mathrm{SNR}(T)=\frac{\overline{s_o^2(T)}}{\overline{n_o^2(t)}}=\frac{4A^2}{N_0\omega_0}\left[1-\exp(-\omega_0 T)\right]^2$$

$$\frac{d\,\mathrm{SNR}(T)}{d\omega_0}=\frac{-4A^2}{N_0}\,\frac{\left[1-\exp\left(-\omega_0 T\right)\right]^2-2\omega_0\left[1-\exp\left(-\omega_0 T\right)\right]T\exp\left(-\omega_0 T\right)}{\omega_0^2}=0$$

השוואת המונה לאפס תיתן

$$1-\exp\left(-\omega_0 T\right)=2\omega_0 T\exp\left(-\omega_0 T\right)$$

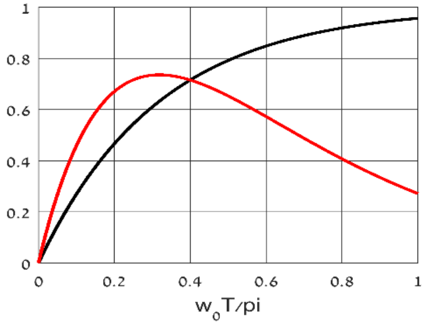
$$\therefore\quad \omega_0 T=0.4\pi$$

קיבלנו עבור מסנן RC
עם פולס מלבני במבוא:

$$\mathrm{SNR}\big|_{\max}=\frac{4A^2}{N_0\dfrac{0.4\pi}{T}}\left[1-\exp(-0.4\pi)\right]^2=\frac{1.62\,A^2T}{N_0}$$

בעוד שעבור מסנן מתואם
לפולס מלבני במבוא:

$$\mathrm{SNR}\big|_{\max}=\frac{2\,A^2T}{N_0}$$



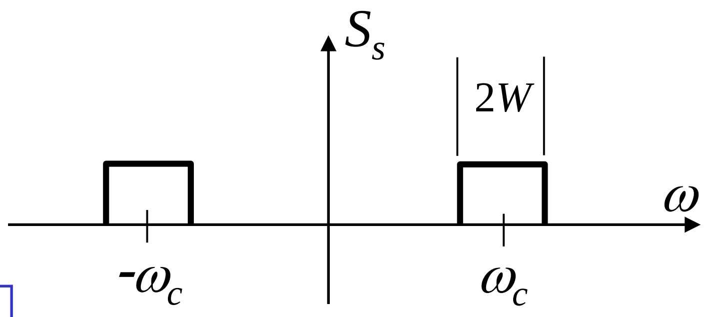
קיבלנו כצפוי יחס אות לרעש במסנן נגד-קבל שהוא נמוך ב 0.92 dB מאשר במסנן מתואם.

Matched filter for bandpass signal

Complex representation of narrow-bandpass signals

Natural envelope

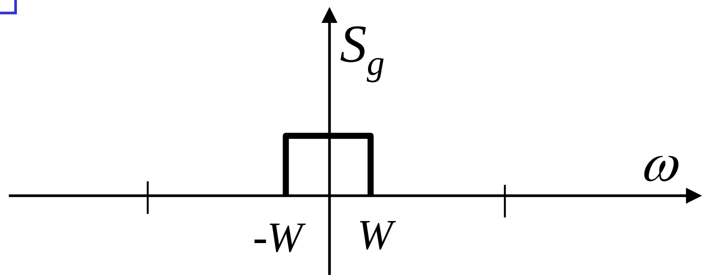
$$s(t) = g(t)\cos\left[\omega_c t + \phi(t)\right]$$



In-phase component

Quadrature component

$$s(t) = g_c(t)\cos\omega_c t - g_s(t)\sin\omega_c t$$



$$g_c(t) = g(t)\cos\phi(t)$$

$$g_s(t) = g(t)\sin\phi(t)$$

$$u(t) = g_c(t) + jg_s(t)$$

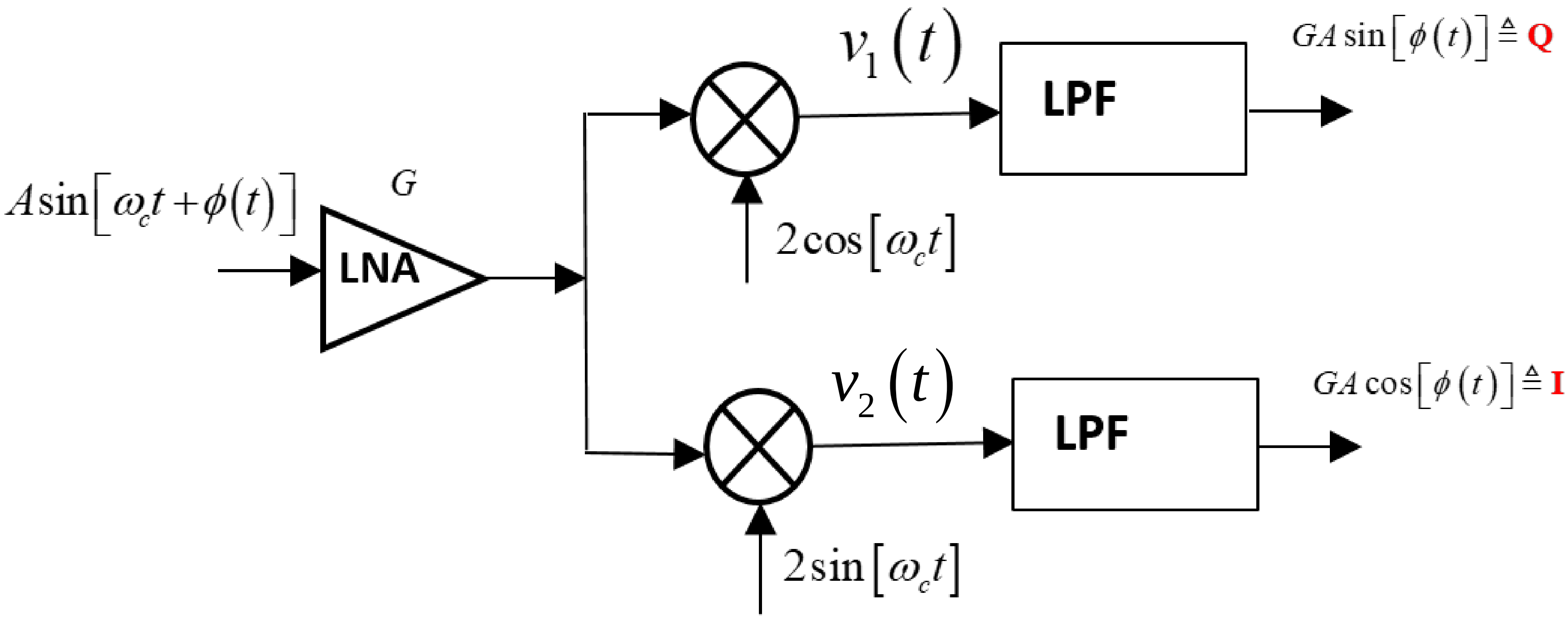
Complex envelope of $s(t)$

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{u(t)e^{j\omega_c t}\right\}$$

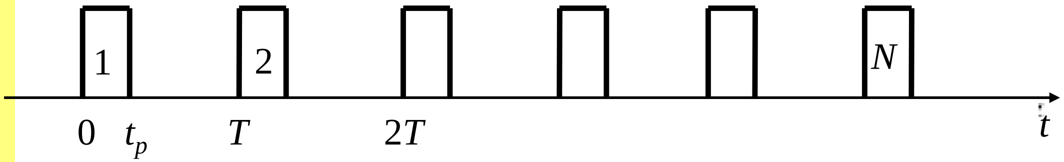
$$g(t) = \left|u(t)\right|$$

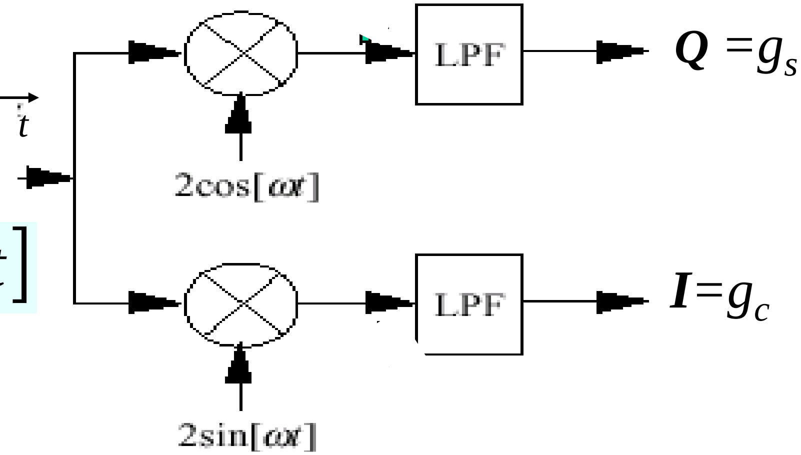
Coherent "I/Q" receiver

$$v_1(t) = 2G\cos(\omega_c t)A(t)\sin\left[\omega_c t + \phi(t)\right] = GA(t)\sin\left[\phi(t)\right] + GA(t)\sin\left[2\omega_c t + \phi(t)\right]$$

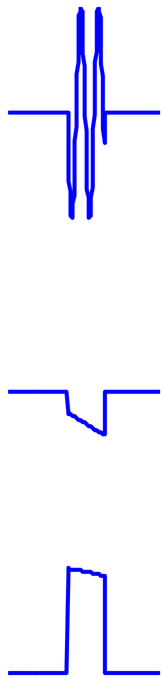


$$v_2(t) = 2G\sin(\omega_c t)A(t)\sin\left[\omega_c t + \phi(t)\right] = GA(t)\cos\left[\phi(t)\right] - GA(t)\sin\left[2\omega_c t + \phi(t)\right]$$





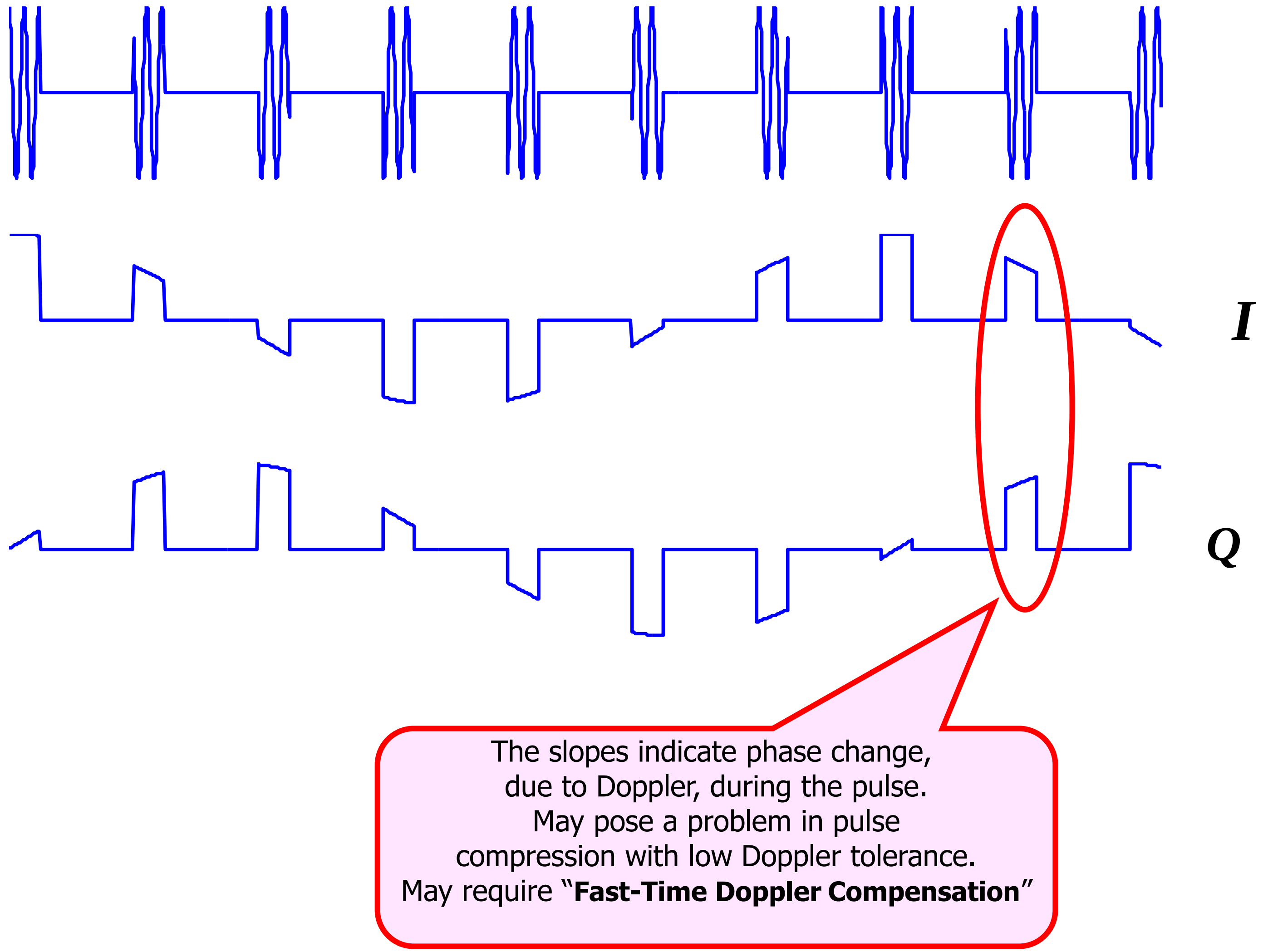
$$s_r(t) = p(t)\cos[(\omega + 2\pi f_D)t]$$

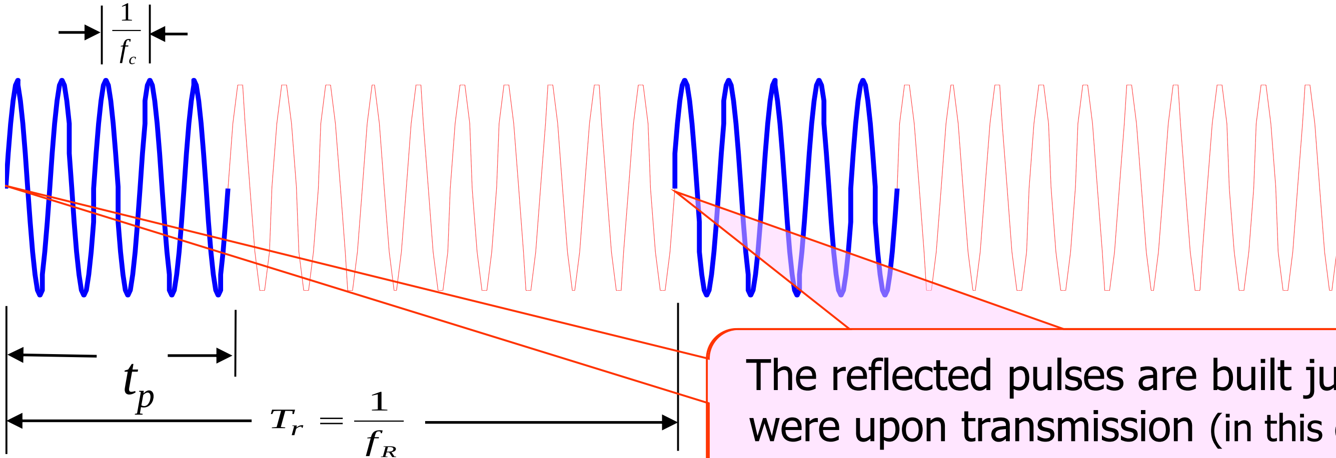


I

Q

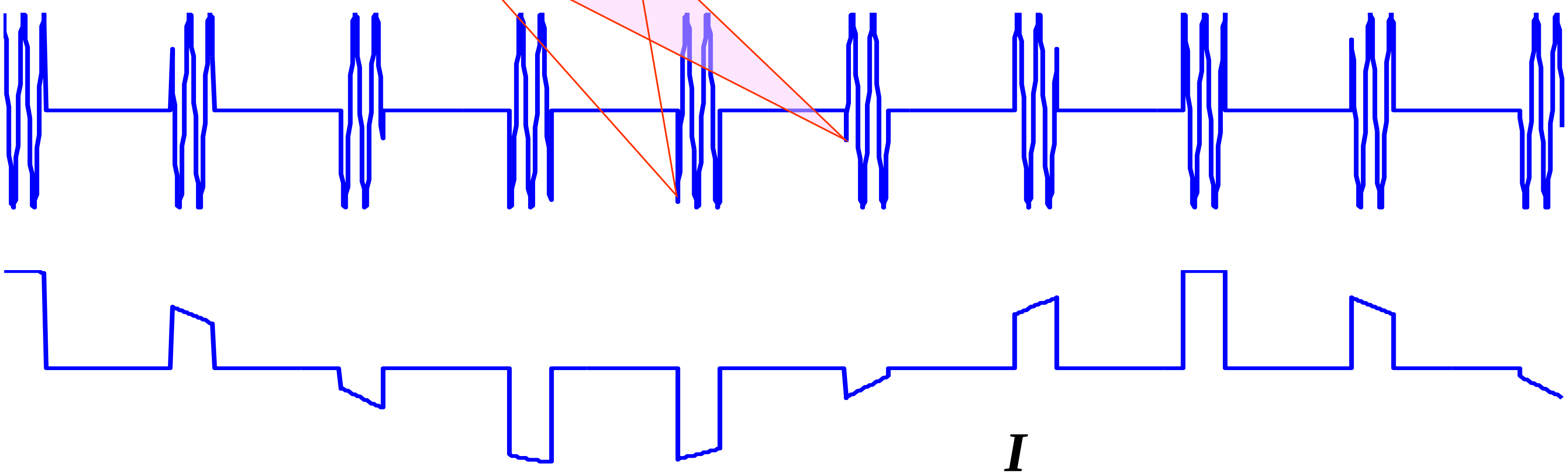
iq_rec


I
Q
The slopes indicate phase change,
due to Doppler, during the pulse.
May pose a problem in pulse
compression with low Doppler tolerance.
May require "**Fast-Time Doppler Compensation**"

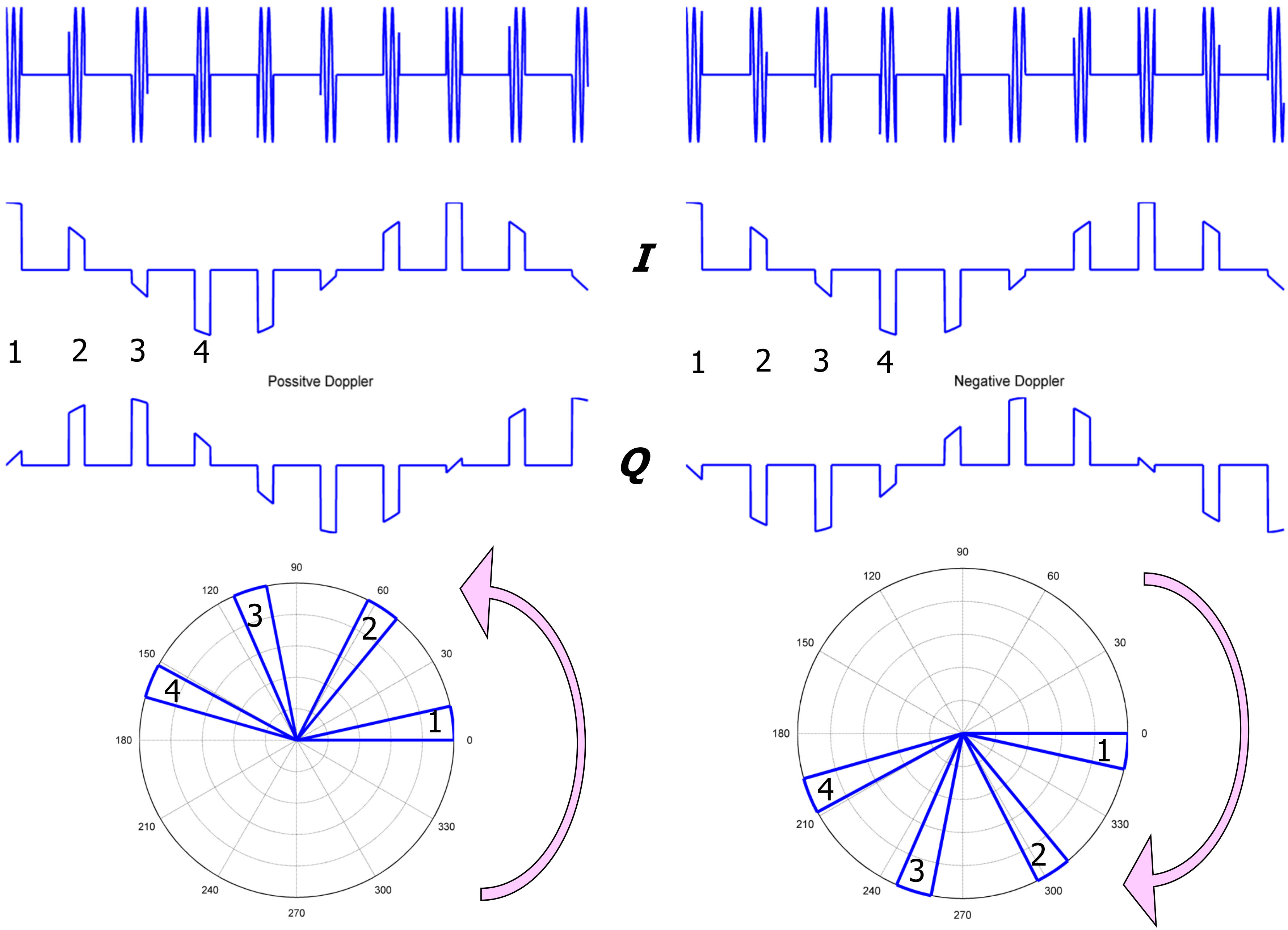


The reflected pulses are built just as they were upon transmission (in this case all the sinusoids start with zero phase).

We see the detected pulses starting with progressively changing initial phases because we display them at <u>fixed</u> delay intervals (range gates), namely slightly before (or after) their true arrival.



Why we need both I and Q channels ?


I
Q
1
2
3
4
Possitve Doppler
Negative Doppler
90
60
30
0
330
300
270
240
210
180
150
120

4'th presentation of narrow band-pass signal

$$s(t)=\tfrac{1}{2}u(t)\exp\left(j\omega_c t\right)+\tfrac{1}{2}u^*(t)\exp\left(-j\omega_c t\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{h(t)=Ks^*\left(t_0-t\right)} \longrightarrow s_o(t)=K\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)s^*\left[\tau-\left(t-t_0\right)\right]d\tau$$

Matched filter

$$s_o(t)=\tfrac{1}{4}K\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(\tau)\exp\left(j\omega_c\tau\right)+u^*(\tau)\exp\left(-j\omega_c\tau\right)\right]$$

$$\cdot\left\{u^*\left(\tau-t+t_0\right)\exp\left[-j\omega_c\left(\tau-t+t_0\right)\right]+u\left(\tau-t+t_0\right)\exp\left[j\omega_c\left(\tau-t+t_0\right)\right]\right\}d\tau$$

After some manipulations and approximations ➔

$$\therefore\quad s_o(t)\approx\tfrac{1}{2}K\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left[j\omega_c\left(t-t_0\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u^*\left(\tau-t+t_0\right)d\tau\right\}$$

$$s_o(t) \approx \tfrac{1}{2} K \,\mathrm{Re}\left\{ \exp\left[j\omega_c \left(t - t_0\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t + t_0) d\tau \right\}$$

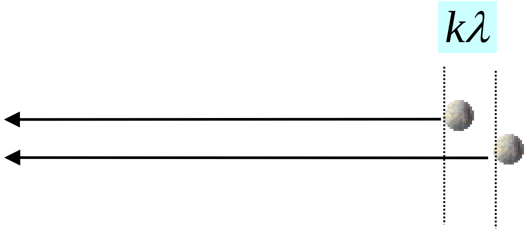
$$s_o(t) \approx \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\left[\underbrace{\tfrac{1}{2} K \exp\left(- j\omega_c t_0\right)}_{\text{Constant phase shift}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t + t_0) d\tau}_{\text{Output of a filter matched to } u(t)} \right]}_{u_o(t)} \exp\left(j\omega_c t\right) \right\}$$

$$u_o(t) \approx K_u \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t + t_0) d\tau$$

The output of a filter matched to a narrow bandpass (NBP) signal has a complex envelope $u_o(t)$ obtained by passing the complex envelope $u(t)$ of the NBP signal through its own matched filter.

Conclusion: In NBP radar it is sufficient to study the complex envelope $u(t)$ of a radar signal and its matched filter output.

When the target is comprised from two, or more, close point-reflectors, issues of constructive and destructive interference are involved, and the carrier frequency must be considered.



Matched filter response to its Doppler-shifted signal

$$u_o(t) \approx K \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t + t_0) d\tau$$

$K = 1$

$u(\tau)\exp(j2\pi\nu\tau)$

$t_0 = 0$

$$u_o(t,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t) \exp(j2\pi\nu\tau) d\tau$$

$\tau \Leftrightarrow t$

$$\boxed{\chi(\tau,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u^*(t - \tau) \exp(j2\pi\nu t) dt}$$

+ in some texts

Our definition of the ambiguity function: $\left|\chi(\tau,\nu)\right|$

Other definitions of the ambiguity function: $\left|\chi(\tau,\nu)\right|^2 , \ \chi(\tau,\nu)$

$$\left|\chi(\tau,\nu)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u^*(t+\tau)\exp\left(j2\pi\nu t\right)dt\right|^2$$

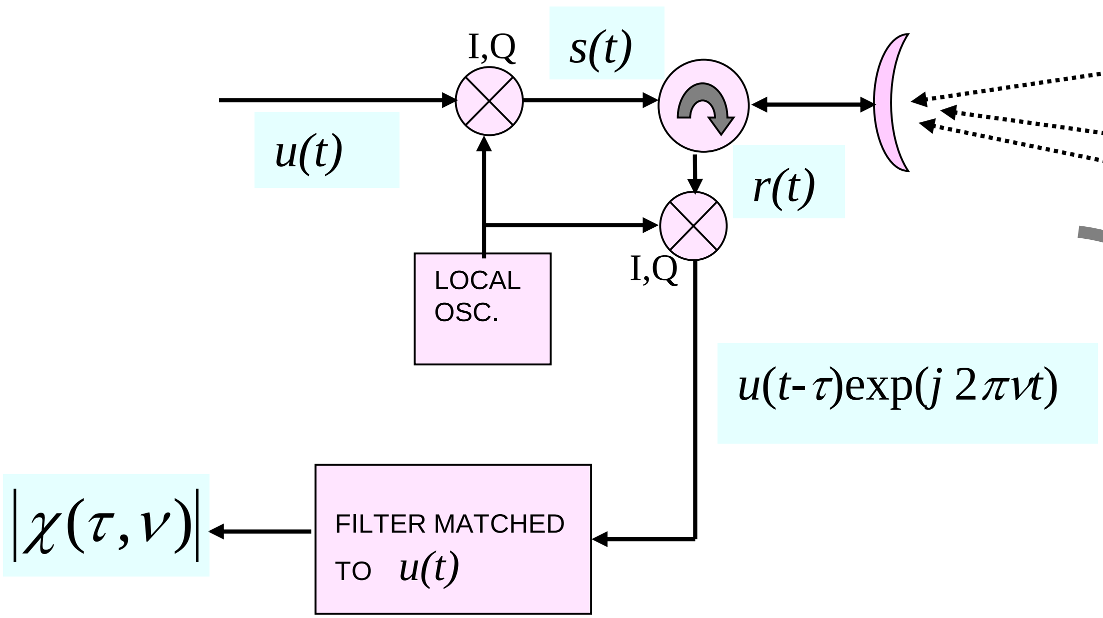
Target further from the radar than the reference ($\tau = 0$) position corresponds to positive τ,

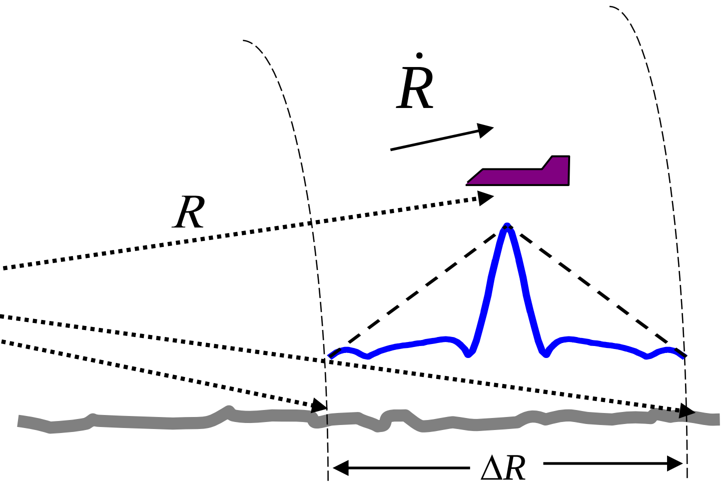
and a positive ν implies a target moving toward the radar.

Sinsky, A.I., and Wang, C.P., "Standardization of the definition of the radar ambiguity function," IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, **10**, (4), July 1974, pp. 532-533.

The practical meaning of the ambiguity function

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{u(t)\exp\left(j2\pi f_0 t\right)\right\}$$





$$\tau = \frac{2R}{C} \quad , \quad \nu = -\frac{2\dot{R}f_0}{C}$$

$$\left|\chi(\tau,\nu)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u^*(t)u(t-\tau)\exp\left(j2\pi\nu t\right)dt\right|$$